

Es sei

$$\bar{V} = 1/c. \quad (13)$$

3. Reibungskräfte zwischen den Ionenarten:

$$K_{R1} = (c_1 c_2/c) r_{12} (v_2 - v_1), \quad (14)$$

$$K_{R2} = (c_1 c_2/c) r_{12} (v_1 - v_2). \quad (15)$$

$v_1$  und  $v_2$  sind die Geschwindigkeiten der Ionenarten in  $y$ -Richtung, und  $r_{12}$  ist ein Reibungskoeffizient<sup>4</sup>. Die Kräftebilanz für die Ionenart 1 heißt

$$K_{L1} + K_{P1} + K_{R1} = 0, \quad (16)$$

und daraus folgt unter Verwendung von (2), (3), (8), (9), (13) und (14) für die transversale Beweglichkeit

$$b_{12} \equiv F c (v_2 - v_1) / i_x H_z, \quad (17)$$

wo  $F$  = FARADAYSche Konstante, der Ausdruck

$$b_{12} = \frac{c F}{c_2 r_{12}} \left( \frac{L_1}{L} - \frac{V_1}{V} \right). \quad (18)$$

Im Fall  $c_1 \ll c_2$  läßt sich  $r_{12}$  durch den Diffusionskoeffizienten  $D_1$  der Ionenart 1 ausdrücken, denn es ist dann im Diffusionsexperiment

$$-R T \, d \ln c_1 / dy = r_{12} (v_1 - v_2) \quad (19)$$

$$\text{und} \quad -D_1 \, d \ln c_1 / dy = v_1 - v_2, \quad (20)$$

und folglich

$$r_{12} = R T / D_1. \quad (21)$$

<sup>4</sup> A. KLEMM, Z. Naturforschg. **8a**, 397 [1953].

## Relativistische Korrekturen zur Kleinwinkeltheorie der Vielfachstreuung

VON HANS H. FLEISCHMANN

Laboratorium für Technische Physik der Technischen Hochschule München

(Z. Naturforschg. **17a**, 930—932 [1962]; eingegangen am 25. Juli 1962)

In einer früheren Arbeit<sup>1</sup> wurde in Weiterführung einer Ableitung von NIGAM und Mitarb.<sup>2</sup> aus dem von DALITZ angegebenen relativistischen Einzelstreuquerschnitt für ein abgeschirmtes COULOMB-Feld eine relativistische Korrektur der Vielfachstreuverteilung geladener Partikel bei kleinen Winkeln abgeleitet. Dabei waren die aufgetretenen Funktionen [vgl. (I, 3)]

$$g_n(\vartheta/\vartheta_0) = - \int_0^\infty \exp(-u^2/4) u^2 J_0(u \vartheta/\vartheta_0) \left( \frac{u^2}{4} \ln \frac{u^2}{4} \right)^{n-1} du \quad (1)$$

für  $n=1$  aus den von NSW in ihrer Tafel III angege-

<sup>1</sup> H. FLEISCHMANN, Z. Naturforschg. **15a**, 1090 [1960]. Formeln daraus werden mit (I, ...) zitiert. Die dort eingeführten Bezeichnungen werden hier übernommen.

<sup>2</sup> B. NIGAM, M. SUNDARESAN u. T. WU, Phys. Rev. **115**, 491 [1959]; im folgenden zitiert mit NSW.

Man erhält damit für  $c_1 \ll c_2$ :

$$b_{12} = \frac{F D_1}{R T} \left( \frac{L_1}{L_2} - \frac{V_1}{V_2} \right). \quad (22)$$

Bei FIKS steht in diesem Ausdruck statt  $L_1/L_2$  das Verhältnis der Ionenladungen  $e_1/e_2$ , weil FIKS für  $K_{L1}$  und  $K_{L2}$  nur das klassische HALL-Feld

$$E_y = -i_x H_z / F c \quad (23)$$

verantwortlich macht. Jedenfalls wird man mit FIKS vermuten, daß der Absolutwert des Klammerausdrucks in (22) die Größenordnung 1 nicht wesentlich überschreitet. Setzt man ihn gleich 1, so ergibt sich unter Verwendung der Werte  $D_1 = 1,7 \cdot 10^{-5} \text{ cm}^2/\text{s}$  und  $T = 300^\circ \text{K}$ , die für das Goldamalgam-Experiment ( $1 = \text{Au}$ ,  $2 = \text{Hg}$ ) etwa zutreffen dürften, aus (22)

$$b_{12} = 6,6 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^2/\text{Vs}.$$

KNOF gibt aber für Goldamalgam (0,1 Gew.-% Au,  $c = 0,068 \text{ Mol/cm}^3$ ) bei  $i_x = 600 \text{ A/cm}^2$  und  $H_z = 5500 \text{ Gauss}$  eine transversale Überführungsgeschwindigkeit  $v_1 - v_2 = -3,5 \cdot 10^{-6} \text{ cm/s}$  an, und daraus berechnet sich nach (17) ( $1 \text{ Gauss} = 10^{-8} \text{ Vs/cm}^2$ ) die experimentelle transversale Beweglichkeit

$$b_{12} = -6,9 \cdot 10^{-1} \text{ cm}^2/\text{Vs}.$$

Dieser um einen Faktor 1000 über der erwarteten Größenordnung liegende experimentelle Wert ist so erstaunlich, daß eine Klärung der aufgeworfenen Frage durch weitere Experimente und Überlegungen sehr erwünscht wäre.

benen Werten berechnet und für  $n > 1$  noch offen gelassen worden.

In der Zwischenzeit wurden nun die angekündigten Rechnungen durchgeführt. Hierbei ergab sich eine Möglichkeit,  $g_1(\vartheta/\vartheta_0)$  auf bekannte Funktionen zurückzuführen: Es ist nämlich mit  $v = \vartheta/\vartheta_0$  und  $x = u/2$

$$g_1(v) = +8 \left\{ \frac{d}{da} \int_0^\infty \exp(-a x^2) J_0(2 v x) dx \right\}_{a=1},$$

was nach Anm.<sup>3</sup>

$$g_1(v) = 2\sqrt{\pi} \exp(-v^2/2) \cdot \{ (v^2 - 1) J_0(i v^2/2) + i v^2 J_1(i v^2/2) \} \quad (2)$$

ergibt. Eine Berechnung von  $g_2$  auf einem ähnlichen Weg führt nach Anm.<sup>3</sup> zu

$$g_2 = -16 \left\{ \frac{d}{da} \left[ \frac{\Gamma((a+1)/2)}{2} {}_1F_1\left(\frac{a+1}{2}, 1; -\frac{v^2}{4}\right) \right] \right\}_{a=4} \quad (3)$$

mit der konfluenten hypergeometrischen Funktion  ${}_1F_1$ .

<sup>3</sup> H. BATEMAN, A. ERDÉLYI, W. MAGNUS, F. OBERHETTINGER u. F. G. TRICOMI, Integral Transforms, McGraw-Hill Book Comp., New York 1954.



Da mir eine geschlossene Darstellung dieses Differentialquotienten nicht bekannt ist, wurde für  $n=2$  das Integral (1) numerisch ausgewertet<sup>4</sup>. Die Zahlenergebnisse dieser Rechnung finden sich zusammen mit einer Auswertung von (2) in Tab. 1<sup>5</sup>. Eine Darstellung der Funktionen zeigt Abb. 1.

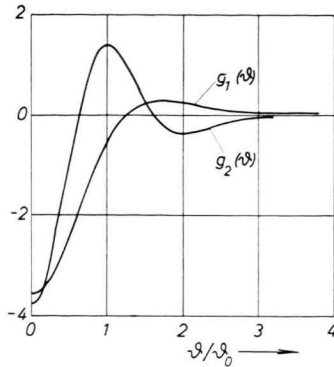


Abb. 1. Verlauf der Korrekturfunktionen  $g_1$  und  $g_2$ .

$\vartheta/\vartheta_0$	$g_1(\vartheta/\vartheta_0)$	$g_2(\vartheta/\vartheta_0)$	$\vartheta/\vartheta_0$	$g_1(\vartheta/\vartheta_0)$	$g_2(\vartheta/\vartheta_0)$
0,0	-3,5449	-3,7389	3,2	+0,0411	-0,0092
0,2	-3,3374	-3,1776	3,4	+0,0327	-0,00073
0,4	-2,7741	-1,7700	3,6	+0,0266	+0,00240
0,6	-2,0067	-0,1707	3,8	+0,0220	+0,00322
0,8	-1,2175	+0,9791	4,0	+0,0184	+0,00315
1,0	-0,5545	+1,3786	4,2	+0,0156	+0,00282
1,2	-0,0929	+1,1335	4,4	+0,0134	+0,00243
1,4	+0,1654	+0,5830	4,6	+0,0116	+0,00208
1,6	+0,2659	+0,0592	4,8	+0,0101	+0,00177
1,8	+0,2696	-0,2601	5,0	+0,00883	+0,00150
2,0	+0,2285	-0,3611	5,2	+0,00778	+0,00128
2,2	+0,1765	-0,3198	5,4	+0,00690	+0,00110
2,4	+0,1304	-0,2244	5,6	+0,00615	+0,00095
2,6	+0,0952	-0,1325	5,8	+0,00550	+0,00082
2,8	+0,0702	-0,0671	6,0	+0,00495	+0,00071
3,0	+0,0530	-0,0287			

Tab. 1. Werte der Funktionen  $g_1(\vartheta/\vartheta_0)$  und  $g_2(\vartheta/\vartheta_0)$ .

Für größere Werte von  $(\vartheta/\vartheta_0)$  als angegeben lassen sich die Funktionswerte aus den folgenden asymptotischen Entwicklungen, die aus (2) und (3) abgeleitet wurden (vgl. Anm. <sup>6</sup>), gewinnen.

$$g_1(v) \rightarrow (1/v^3) [1 + (9/4)v^2 + (225/32)v^4 + \dots], \quad (4)$$

$$g_2(v) \rightarrow - (9/2)v^5 (8/3 - \gamma - \ln 4v) + O(v^{-7}) \quad (5)$$

<sup>4</sup> Die Rechnungen wurden in ALGOL 60 programmiert und an der elektronischen Rechenmaschine PERM der Techn. Hochschule München durchgeführt.

<sup>5</sup> Vergleicht man die hier für  $g_1$  angegebenen Werte mit den aus NSW berechneten in I, so zeigen sich teilweise recht kräftige Abweichungen. Das in (I, 4) vernachlässigte Glied

$$(1/2) \chi_c^2 [\beta^2 + \pi \alpha \beta^2 - (1/4) \xi]$$

aus (NSW, 65) beträgt bei den in Frage stehenden Folien nur etwa  $10^{-3}$ ; bei den differierenden Variablenwerten ist

mit der MASCHERONISCHEN Konstanten  $\gamma=0,577$ .  $g_1$  ergibt also bei großen Winkeln gerade das erste Zusatzglied der DALITZschen Entwicklung.

Zu einem Vergleich mit den experimentellen Ergebnissen von HANSON und Mitarb.<sup>7</sup> wurden für die von diesen gemessenen Goldfolien die theoretischen Streuverteilungen berechnet. Im Gegensatz zu der Angabe von HANSON und Mitarb. wurde dabei, wie aus der MOLIÈRESCHEN Endformel folgt, bei der dünnen Folie mit  $\vartheta_0=2,79^\circ$  gerechnet. Wie wegen der Vergrößerung des Streuquerschnitts und damit des mittleren Streuquadrats zu erwarten, tritt durch  $g_1$  und  $g_2$  insgesamt eine Verbreiterung des Vielfachstreuanteiles um etwa 1% ein, mit entsprechenden Korrekturen der Streuverteilung. Bei größeren Streuwinkeln wachsen die Korrekturen entsprechend dem ersten Glied der DALITZ-Entwicklung bis über 30% an (vgl. Abb. 2). Der Einfluß von  $g_2$  kommt auch im Gebiet der Mehrfachstreuung nicht über 2% hinaus.

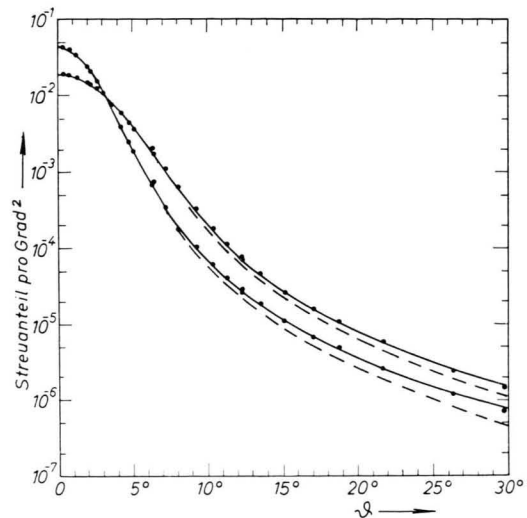


Abb. 2. Streuverteilungen für die von HANSON und Mitarb. gemessenen Goldfolien. Ausgezogene Kurven: theoretische Verteilungen nach (I, 3); gestrichelte Kurven: normale MOLIÈRE-Verteilung.

In Abb. 2 sind weiterhin die experimentellen Punkte von HANSON und Mitarb. übernommen. Für Streuwinkel unter  $20^\circ$  liegen diese nun zwar durchwegs um einige Prozent über den theoretischen Kurven; nimmt

daher sein Einfluß nur sehr gering. Da weiterhin einige der betroffenen Werte aus Tab. 1 auch durch numerische Integration bestätigt wurden, so dürften diese Diskrepanzen auf numerische Fehler bei NSW zurückzuführen sein.

<sup>6</sup> H. BATEMAN, A. ERDÉLYI, W. MAGNUS, F. OBERHETTINGER u. F. G. TRICOMI, Higher Transcendental Functions, McGraw-Hill Book Comp., New York 1953.

<sup>7</sup> A. O. HANSON, L. H. LANZL, E. M. LYMAN u. M. B. SCOTT, Phys. Rev. **84**, 634 [1951].

man aber nur einen Fehler der Absoluteichung um weniger als 5% an, so betragen die Abweichungen der Meßpunkte höchstens wenige Prozent. Die Näherung erscheint hier also recht gut, was durch einen Vergleich der aus diesen korrigierten Verteilungen folgenden  $(1/e)$ -Breiten von  $2,53^\circ$  bzw.  $3,84^\circ$  mit den gemessenen Breiten von  $2,56^\circ$  bzw.  $3,78^\circ$  bestätigt wird. Für Streuwinkel größer als  $20^\circ$  ergeben sich in diesem Fall aus der Theorie allerdings etwas zu große Streuintensitäten. Dies ist auf die schon in Anm.<sup>4</sup> erwähnte Nähe-

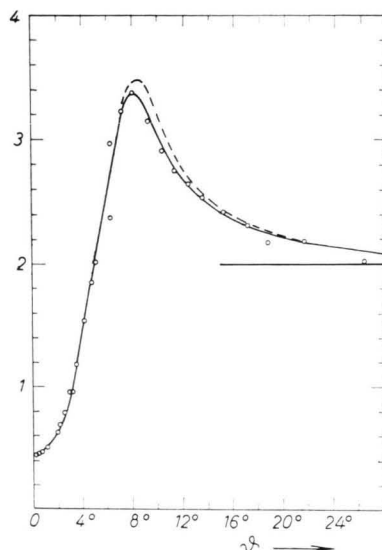


Abb. 3. Verhältnis der Streuintensitäten der beiden von HANSON und Mitarb. gemessenen Goldfolien.

zung zurückzuführen. Das vernachlässigte Glied in (NSW, 65) ergibt nämlich zusammen mit der 1 der letzten großen Klammer für große Winkel gerade die bei den obigen Entwicklungen (4) und (5) nicht herauskommenden  $\sin^2(\chi/2)$ -Glieder des DALITZ-Querschnittes von (I, 1). Berücksichtigt man auch diese Glieder des Einzelstreuquerschnittes, so ergibt sich auch im Bereich von  $20-30^\circ$  eine gute Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment. Eine entsprechende Korrektur der Vielfachstreuverteilung erscheint jedoch nicht sehr sinnvoll, da einerseits bei diesen Winkeln die Kleinwinkelnäherung nicht mehr gut anwendbar ist, und andererseits (bei kleinen Winkeln) ein wesentlicher Einfluß dieser Glieder nicht vorhanden ist.

Der Einfluß der eigentlichen Vielfachstreuung, den das in Abb. 3 nochmals dargestellte Verhältnis der Streuintensitäten der beiden Folien recht gut wiedergibt, wird dagegen auch bei diesen Winkeln durch (I, 3) schon recht vernünftig erfaßt. Die Berücksichtigung der Korrekturfunktionen  $g_1$  und  $g_2$  bringt dabei vor allem bei Winkeln um  $10^\circ$  eine merkliche Verbesserung gegenüber der normalen MOLIERE-Theorie.

Insgesamt stellt also (I, 3) außer bei sehr hoher Meßgenauigkeit eine hinreichende Näherung für die Kleinwinkel-Vielfachstreuverteilung auch relativistischer geladener Partikel dar, wobei in vielen Fällen der Einfluß von  $g_2$  vernachlässigbar sein wird.

Zum Schluß möchte ich Herrn Prof. H. MAIER-LEIBNITZ für die Möglichkeit, die Arbeit an seinem Institut auszuführen, und für die Anregungen, die ich dabei von ihm empfangen habe, danken. Mein Dank gilt gleichfalls Herrn Dr. CHR. REINSCH, der freundlicherweise die Programmierung für die PERM übernommen hat, für die dabei aufgewandte Mühe.